关于 Pollaczek 多项式零点的两点性质*

王红勇[1]，周建荣[2]
（1. 南华大学数理学院，湖南 衡阳 421001；
2. 佛山科学技术学院理学院数学系，广东 佛山 528000）

摘　要：主要讨论 Pollaczek 多项式 $P_n^{\lambda}(x;a,b)$ 的零点关于参数 λ 的单调性，及其与 $P_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b)$ 和 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 三者之间零点的交叉性。

关键词：Pollaczek 多项式；零点交叉；正交多项式
中图分类号：O174　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）04－0038－04

Research on the Two Properties of Zeros of Pollaczek Polynomials

WANG Hongyong[1], *ZHOU Jianrong*[2]
(1. School of Mathematics and Physics, University of South China, Hengyang 421001, China;
2. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China)

Abstract: The monotonicity of zeros of Pollaczek polynomials $P_n^{\lambda}(x;a,b)$ about the parameter λ and the interlacing properties of zeros of $P_n^{\lambda}(x;a,b)$, $P_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b)$ and $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ are investigated.

Key words: Pollaczek polynomials; the interlacing properties of zeros; orthogonal polynomials

多项式 $p_n(x)$ 与 $p_{n-1}(x)$ 的零点交叉是指：若 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ 是 $p_n(x)$ 的 n 个实零点，$y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1}$ 是 $p_{n-1}(x)$ 的 $n-1$ 个实零点，则其满足以下关系式

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \cdots < x_{n-1} < y_{n-1} < x_n$$

若多项式 $p_n(x)$ 满足条件 $\int_c^d x^k p_n(x) w(x)\mathrm{d}x = 0, k = 0,1,2,\cdots,n-1$，其中权函数 $w(x) > 0$，正交区间 $[c,d]$ 是有限区间或无限区间，则称 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 是 $[c,d]$ 上关于 $w(x)$ 正交的多项式族，事实上，在相差一个常数因子的意义下，它是唯一确定的，通常取 $p_n(x)$ 的最高次系数为正数。由经典的正交多项式理论知，$p_n(x)$ 的零点均为实数且落在 (c,d) 内，此外，$p_n(x)$ 与 $p_{n-1}(x)$ 的零点交叉。

Pollaczek 多项式是 Pollaczek 本人在考察法国电话系统的一个随机模型时首次提出来的，它本质上与排队论有关。近年来，对于 Pollaczek 多项式及其零点渐近性质的研究引起了国内外许多专家学者的极大兴趣[1-2]，但是当参数 λ, a, b 变动时，关于其零点的交叉性和单调性的结果却不多。而多项式的零点交叉性质在诸如 approximation of finite Hilbert Transform[3]，approximation of zeros by fixed point iteration techniques[4]，existence of positive numerical quadrature formulae[5] 等各种物理、工程问题和理论中都有广泛的应用。

本文从生成函数出发，得到了两个重要关系式，在此基础之上，获得了 $P_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b)$，$P_n^{\lambda}(x;a,b)$ 和 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 三者零点交叉的充分条件。然后从其权函数出发，得到了当 λ 增加到 $\lambda+1$ 时，$P_n^{\lambda}(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 所对应的零点具有单调性质的充分条件。

1　Pollaczek 多项式

Pollaczek 多项式 $P_n^{\lambda}(x;a,b)$（$\lambda > 0, a > |b|$）可由下列三项循环迭代式给出[6]

* **收稿日期**：2011－10－17
基金项目：广东省自然科学基金博士启动基金资助项目（10452800001004255）；南华大学校内博士启动基金资助项目（2011XQD36）
作者简介：王红勇（1982 年生），男，讲师；E-mail：sysuwhylj@yahoo.cn

$$(n+1)P_{n+1}^{\lambda}(x;a,b)=2[(n+a+\lambda)x+b]\cdot P_n^{\lambda}(x;a,b)-(n+2\lambda-1)P_{n-1}^{\lambda}(x;a,b) \quad (1)$$

其初始条件为

$$P_0^{\lambda}(x;a,b)=1,\ P_1^{\lambda}(x;a,b)=2(\lambda+a)x+b$$

当 $\lambda>0, a>|b|$ 时，Pollaczek 多项式满足如下的正交关系式

$$\int_{-1}^{1}P_m^{\lambda}(x;a,b)P_n^{\lambda}(x;a,b)w^{\lambda}(x;a,b)\mathrm{d}x=\frac{2\pi\Gamma(n+2\lambda)\delta_{m,n}}{2^{2\lambda}(n+\lambda+a)n!}$$

其中

$$w(x;a,b,\lambda)=(1-x^2)^{\lambda-1/2}\exp[(2\theta-\pi)\Phi(\theta)]\cdot|\Gamma(\lambda+\mathrm{i}\Phi(\theta))|^2, x=\cos\theta\in(-1,1)$$

2　主要结果及其证明

函数 $F(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\lambda}(x;a,b)t^n$ 称为 $P_n^{\lambda}(x;a,b)$ 的生成函数，由式（1）可得

$$F(x,t)=(1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-\lambda+\mathrm{i}\Phi(\theta)}(1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^{-\lambda-\mathrm{i}\Phi(\theta)} \quad (2)$$

其中

$$x=\cos\theta,\quad \Phi(\theta):=\frac{a\cos\theta+b}{\sin\theta}$$

对式（2）做变换 $\lambda\to\lambda+1$，化简得

$$\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\lambda+1}(x;a,b)t^n=(1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-(\lambda+1)+\mathrm{i}\Phi(\theta)}(1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^{-(\lambda+1)-\mathrm{i}\Phi(\theta)}=(1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-1}(1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{\lambda}(x;a,b)t^n \quad (3)$$

若记 $P_{-1}^{\lambda}(x;a,b)=0$，$P_{-2}^{\lambda}(x;a,b)=0$，对式（3）应用等式

$$(1-t\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})(1-t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})=1-t(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})+t^2$$

并匹配 $t^n(n=0,1,2,\cdots)$ 前的系数，则有

$$P_n^{\lambda+1}(x;a,b)-2xP_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b)+P_{n-2}^{\lambda+1}(x;a,b)=P_n^{\lambda+1}(x;a,b),\ n=0,1,2,\cdots \quad (4)$$

在式（1）中用 $n-1$ 替换 n，$\lambda+1$ 替换 λ，并化简可得

$$P_{n-2}^{\lambda+1}(x;a,b)=\frac{-n}{n+2\lambda}P_n^{\lambda+1}(x;a,b)+\frac{2[x(n+\lambda+a)+b]}{n+2\lambda}P_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b) \quad (5)$$

结合式（4）和式（5）得

$$P_n^{\lambda}(x;a,b)=\frac{2\lambda}{n+2\lambda}P_n^{\lambda+1}(x;a,b)-\frac{2x(\lambda-a)-2b}{n+2\lambda}P_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b) \quad (6)$$

注 1　据我们所知式（4）和式（6）是新的结果。

本文的结果需要用到下面的结论（[7], Theorem 3）。

引理 1　设 $R_n(x)=P_n(x)+a_nP_{n-1}(x), n=1,2,\cdots$，$a_n$ 为非零实数，$\{P_n(x)\}$ 为一族正交多项式，其权函数为 $w(x)>0, x\in[c,d]$，其最高次系数大于零，记 $c<x_{1,n-1}<x_{2,n-1}<\cdots<x_{n-1,n-1}<d$ 为 $P_{n-1}(x)$ 的零点，$c<x_{1,n}<x_{2,n}<\cdots<x_{n,n}<d$ 为 $P_n(x)$ 的零点，$y_1<y_2<\cdots<y_n$ 为 $R_n(x)$ 的零点，

（i）$a_n<0\Leftrightarrow x_{1,n}<y_1<x_{1,n-1}<x_{2,n}<y_2<x_{2,n-1}<\cdots<x_{n-1,n}<y_{n-1}<x_{n-1,n-1}<x_{n,n}<y_n$；

（ii）$a_n>0\Leftrightarrow y_1<x_{1,n}<x_{1,n-1}<y_2<x_{2,n}<\cdots<x_{n-1,n-1}<y_n<x_{n,n}$；

为了让引理 1 的结论也适用于本文所考虑的情形，我们对其做如下的一个推广。

定理 1　设 $R_n(x)=c_nP_n(x)+a_n(x)P_{n-1}(x)$，$n=1,2,\cdots$，$c_n$ 为非零实数，$a_n(x)$ 是关于 x 的一元一次函数，$\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_n$ 为 $R_n(x)$ 的零点，其他假设条件及记号同引理 1，则总存在 $\tilde{y}_1,\tilde{y}_2,\cdots,\tilde{y}_n$ 中的 $n-1$ 个数，记为 $y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}$，使得

（i）$c_na_n(x)<0, x\in(c,d)\Rightarrow$

$$x_{1,n}<y_1<x_{1,n-1}<x_{2,n}<y_2<x_{2,n-1}<\cdots<x_{n-1,n}<y_{n-1}<x_{n-1,n-1}<x_{n,n} \quad (7)$$

（ii）$c_na_n(x)>0, x\in(c,d)\Rightarrow x_{1,n}<x_{1,n-1}<y_1<x_{2,n}<\cdots<x_{n-1,n-1}<y_{n-1}<x_{n,n}$　(8)

证明　因为 $\{p_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$ 是 $[c,d]$ 上的正交多项式族，所以 $p_n(x)$ 的零点均为实数且落在 (c,d) 内，此外，$p_n(x)$ 与 $p_{n-1}(x)$ 的零点交叉，即有

$$x_{1,n}<x_{1,n-1}<x_{2,n}<x_{2,n-1}<\cdots<x_{n-1,n}<x_{n-1,n-1}<x_{n,n} \quad (9)$$

因此 $p_{n-1}(x_{i,n})p_n(x_{i,n-1})<0, i=1,2,\cdots,n-1$。所以

$$R_n(x_{i,n})R_n(x_{i,n-1})=c_na_n(x_{i,n})P_{n-1}(x_{i,n})P_n(x_{i,n-1})<0$$

由零点定理可知，在 $(x_{i,n},x_{i,n-1})$ 内至少有 $R_n(x)$ 的一个实零点。结合式（9），知 $R_n(x)$ 至少有 $n-1$ 个零点 $y_1<y_2<\cdots<y_{n-1}$ 使得式（7）成立。式（8）同理可证。证毕。

记 $x_{1,n}^{\lambda}<x_{2,n}^{\lambda}<\cdots<x_{n,n}^{\lambda}$ 为多项式 $P_n^{\lambda}(x;a,b)$ 的 n 个零点。

定理 2　$P_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b)$ 的零点与 $P_n^{\lambda}(x;a,b)$ 的零点交叉。

证明　由式（1）知 $P_n^{\lambda}(x;a,b)$ 的最高次系数

为 $\frac{n!}{2^n(a+\lambda)_n}>0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$P_n^\lambda(x;a,b)\to+\infty$，另利用 $P_{n-1}^{\lambda+1}(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 的零点交叉性质，我们有 $P_n^\lambda(x_{n-1,n-1}^{\lambda+1};a,b)=\frac{2\lambda}{n+2\lambda}P_n^{\lambda+1}(x_{n-1,n-1}^{\lambda+1};a,b)<0$，所以在 $(x_{n-1,n-1}^{\lambda+1},+\infty)$ 至少上有 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 的一个零点，即有 $x_{n-1,n-1}^{\lambda+1}<x_{n,n}^\lambda$，再对式（6）应用定理 1，得

$$x_{1,n}^\lambda<x_{1,n-1}^{\lambda+1}<x_{2,n}^\lambda<x_{2,n-1}^{\lambda+1}\cdots<x_{n-1,n}^\lambda<x_{n-1,n-1}^{\lambda+1}$$

所以结论成立。证毕。

注 2 一般而言，$P_n^\lambda(x;a,b)$ 的零点与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 的零点不满足交叉性质。比如，取 $a=1$，$b=0.2$ 及 $\lambda=0.5$，用 Matlab 算得：

$P_{10}^{0.5}(x;1,0.2)$ 的零点为

$\{-0.7349;-0.5933;-0.4517;-0.3132;-0.1476;0.0338;0.2062;0.3700;0.5326;0.6883\}$。

$P_{10}^{1.5}(x;1,0.2)$ 的零点为

$\{-0.7496;-0.6153;-0.4736;-0.3178;-0.1357;0.0587;0.2424;0.4070;0.5614;0.7072\}$。

不难看出，$P_{10}^{0.5}(x;1,0.2)$ 和 $P_{10}^{1.5}(x;1,0.2)$ 的零点不具有交叉性质，那么当 a,b,λ 满足什么条件的时候，$P_n^\lambda(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 的零点才会相互交叉呢？

定理 3 如果参数 λ,a,b 满足 $\lambda>0$，$a>|b|$，及以下两个条件当中之一：

（i）当 $\lambda>a$ 时，$\lambda+b-a<0$ 或 $a+b-\lambda>0$；

（ii）当 $\lambda<a$ 时，$b+a-\lambda<0$ 或 $\lambda+b-a>0$，

那么 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 的零点交叉。

证明 如果用定理 1 条件中的记号，那么这里

$$c_n=\frac{2\lambda}{n+2\lambda}>0,\qquad a_n(x)=\frac{2b-2x(\lambda-a)}{n+2\lambda},$$

因为 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 的正交区间为 $[-1,1]$，要使 $c_na_n(x)<0,x\in(-1,1)$，只需 $a_n(x)<0$，即要求对 $x\in(-1,1)$ 成立。下面分两种情况讨论：

（I）$\lambda>a$，此时 $x>\frac{b}{\lambda-a}$，要使其 $\forall x\in(-1,1)$ 成立，只需 $\frac{b}{\lambda-a}<-1$，解得 $b+\lambda-a<0$。

（II）$\lambda<a$，此时 $x<\frac{b}{\lambda-a}$，要使其 $\forall x\in(-1,1)$ 成立，只需 $\frac{b}{\lambda-a}>1$，解得 $b+a-\lambda<0$。

由定理 1 知，若（I）或（II）成立，则

$$x_{1,n}^{\lambda+1}<x_{1,n}^\lambda<x_{2,n}^{\lambda+1}<x_{2,n}^\lambda<\cdots<x_{n-1,n}^\lambda<x_{n-1,n-1}^{\lambda+1}\tag{10}$$

另一方面，与定理 2 的证明类似，因为当 $x\to+\infty$ 时，$P_n^\lambda(x;a,b)\to+\infty$，且在（I）、（II）成立的情况下 $P_n^\lambda(x_{n,n}^{\lambda+1})=\frac{2[b-x_{n,n}^{\lambda+1}(\lambda-a)]}{n+2\lambda}P_{n-1}^{\lambda+1}(x_{n,n}^{\lambda+1})<0$（$\because x_{n,n}^{\lambda+1}\in(-1,1)$），所以 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 在 $(x_{n-1,n-1}^{\lambda+1},+\infty)$ 内至少含有一个零点 $x_{n,n}^\lambda$。

总而言之，我们有

$$x_{1,n}^{\lambda+1}<x_{1,n}^\lambda<x_{2,n}^{\lambda+1}<x_{2,n}^\lambda<\cdots<x_{n-1,n}^\lambda<x_{n-1,n-1}^{\lambda+1}<x_{n,n}^\lambda$$

即 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 的零点交叉。

用类似的方法可证，当 $\lambda>a$，$a+b-\lambda>0$，或 $\lambda<a$，$\lambda+b-a>0$ 时，

$$x_{1,n}^\lambda<x_{1,n}^{\lambda+1}<x_{2,n}^\lambda<x_{2,n}^{\lambda+1}<\cdots<x_{n-1,n}^{\lambda+1}<x_{n-1,n-1}^\lambda<x_{n,n}^{\lambda+1}\tag{11}$$

即 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 的零点交叉。将所得结果稍加整理，可知所证成立。证毕。

注 3 从（10）可以看出，当 λ 增加到 $\lambda+1$ 时，$P_n^\lambda(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 所对应的零点具有单调递增的性质，即 $x_{i,n}^{\lambda+1}<x_{i,n}^\lambda$；而（11）则反映了其所对应的零点具有单调递减的性质，即 $x_{i,n}^\lambda<x_{i,n}^{\lambda+1}$。但一般而言，反之不成立，即由两个多项式所对应的零点具有单调性质，不能导出其零点具有交叉性，换句话说，定理 3 只是给出了 $P_n^\lambda(x;a,b)$ 与 $P_n^{\lambda+1}(x;a,b)$ 所对应的零点具有单调性质的充分条件，而不是必要条件。下面的定理从其权函数出发，得到了另一个充分条件。

定理 4 若参数 λ，a，b 满足 $\lambda>0$，$a>|b|$，且

（i）如果当 $a>\lambda$ 时，有 $ab>a^2-\lambda^2$，则 $x_k^\lambda\leqslant x_x^{\lambda+1},k=1,2,\cdots,n$。

（ii）如果当 $a<\lambda$ 时，有 $ab>\lambda^2-a^2$，则 $x_k^{\lambda+1}\leqslant x_x^\lambda,k=1,2,\cdots,n$。

证明 经典 Pollaczek 正交多项式的权函数为

$$w(x;a,b,\lambda)=(1-x^2)^{\lambda-1/2}\exp[(2\theta-\pi)\Phi(\theta)]|\Gamma(\lambda+\mathrm{i}\Phi(\theta))|^2,$$
$$x=\cos\theta\in(-1,1)。$$

其中 $\Phi(\theta)=\frac{ax+b}{\sqrt{1-x^2}}$，不难知道若（i）成立，则函数

$$\frac{w(x;a,b,\lambda)}{w(x;a,b,\lambda+1)}=\frac{1}{(1-x^2)(\lambda+\mathrm{i}\Phi(\theta))(\lambda-\mathrm{i}\Phi(\theta))}=\frac{1}{(a^2-\lambda^2)x^2+2abx+b^2+\lambda^2}$$

（下转第 44 页）

方一致 Henstock 可积的充分必要条件，得出了模糊随机过程函数列的收敛定理。该积分本质上是取值度量空间函数的积分，不需要利用测度理论的支持。根据这种积分的定义和性质，能否给出模糊值过程关于模糊值过程的积分，以及能否定义模糊 Brown 运动，进而研究模糊值过程关于此模糊 Brown 运动的积分问题，对于这种有意义的随机风趣的研究，这是我们后续研究工作的重点。

参考文献：

[1] GONG Z T. On the problem of characterizing derivatives for the fuzzy-valued functions (II): almost everywhere differentiability and strong Henstock integral [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 145: 381 – 393.

[2] GONG Z T, SHAO Y B. The controlled convergence theorem for the strong Henstock integrals of fuzzy-number-valued functions [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2009, 160: 1528 – 1546.

[3] FENG Y H. Mean-squares integral and differential of fuzzy stochastic process [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1999, 102: 271 – 280.

[4] FENG Y H. Mean-squares Riemann-Stieltjes integrals of fuzzy stochastic process and theirs applications [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 110: 27 – 41.

[5] 李静，冯玉湖. 模糊随机过程的均方 Henstock 积分[J]. 东华大学学报，2007，33(5)：590 – 594.

[6] 李静. 模糊随机过程的均方 Henstock 积分[D]. 中国优秀硕士学位论文全文数据库，2007.

[7] 任爱红. 二阶模糊随机过程均方 Henstock-Stieltjes 积分的收敛定理[J]. 西南师范大学学报，2011，36(5)：62 – 66.

[8] 任爱红. 二阶模糊随机过程均方 Henstock-Stieltjes 积分的相关性质[J]. 曲阜师范大学学报，2011，37(1)：35 – 38.

[9] 任爱红. 二阶模糊随机过程均方 Henstock-Stieltjes 积分[J]. 甘肃科学学报，2012，24(1)：16 – 19.

[10] 吴从炘，马明. 模糊分析基础[M]. 北京：国防工业出版社，1991.

（上接第 40 页）

关于 $x \in (-1,1)$ 是单调递减函数，再由 Markoff 在文［8，p116，Theorem 6.12.2］中的结论知，

$$x_k^{\lambda} \leqslant x_x^{\lambda+1}, k = 1,2,\cdots,n$$

同理可证，若（ii）成立，则函数 $\dfrac{w(x;a,b,\lambda)}{w(x;a,b,\lambda+1)}$ 关于 $x \in (-1,1)$ 是单调递增函数，因此

$$x_k^{\lambda+1} \leqslant x_x^{\lambda}, k = 1,2,\cdots,n$$

证毕。

参考文献：

[1] BO R, WONG R. Asymptotic behavior of the Pollaczek polynomials and their zeros [J]. Stud Appl Math, 1996, 96: 307 – 338.

[2] ZHOU J R, ZHAO Y Q. An infinite asymptotic expansion for the extreme zeros of the Pollaczek polynomials [J]. Stud Appl Math, 2007, 118(2): 255 – 279.

[3] MASTROIANNI G, OCCORSIO D. Interlacing properties of the zeros of the orthogonal polynomials and approximation of the Hilbert transform [J]. Computers and Mathematics with Applications, 1995, 30 (3): 155 – 168.

[4] SEGURA J. The zeros of special functions from a fixed point method [J]. SIAM Journal of Numerical Analysis, 2002, 40(1): 114 – 133.

[5] PEHERSTORFER F. Linear combination of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas [J]. Mathematics of Computation, 1990, 55 (191): 231 – 241.

[6] WANG H Y, ZHAO Y Q. Uniform asymptotics and zeros of a system of orthogonal polynomials defined via a difference equation [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 369 (2): 453 – 472.

[7] BREZINSKI C, DRIVER K A, REDIVO-ZAGLIAC M. Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials [J]. Applied Numerical Mathematics, 2004, 48(2): 157 – 168.

[8] SZEG G. Orthogonal polynomials [M]. New York: American Mathematical Society, 1959.